第 7 講　軌跡と領域

PART1　軌跡の方程式

例題

次の条件を満たす点Ｐの軌跡を求めよ。

(1)　2 点 $A(-1,\ 0)$，$B(1,\ 2)$ から等距離にある点Ｐ

(2)　2 点 $A(-2,\ 0)$，$B(1,\ 0)$ からの距離の比が $2:1$ である点Ｐ

Point Pickup

練習

2点 $A(-4,\ 0)$，$B(2,\ 0)$ について，次の条件を満たす点の軌跡を求めよ。

(1)　2点A，Bから等距離にある点P

(2)　2点A，Bからの距離の比が $3:1$ である点Q

第 7 講　PART1 確認問題

次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

1　2 点 A(3, 0), B(−5, 4) から等距離にある点 P

直線　[ア]$x-y+$[イ]$=0$

2　2 点 A(−3, 0), B(4, 0) からの距離の比が 5：2 である点 P

中心 $\left(\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}},\ \boxed{カ}\right)$，半径 $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$ の円

第 7 講　軌跡と領域

PART1　軌跡の方程式

例題

次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1)　2 点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 2)$ から等距離にある点 P

(2)　2 点 A$(-2,\ 0)$，B$(1,\ 0)$ からの距離の比が 2：1 である点 P

(1)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

AP = BP より $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって，$(x+1)^2+y^2=(x-1)^2+(y-2)^2$

整理すると $x+y-1=0$

よって，点 P は直線 $x+y-1=0$ 上にある。

逆に，この直線上のすべての点は，条件を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は　直線 $x+y-1=0$

(2)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

AP：BP = 2：1 より AP = 2BP　つまり　$\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$

よって，$(x+2)^2+y^2=4\{(x-1)^2+y^2\}$

整理すると $x^2+y^2-4x=0$

すなわち，$(x-2)^2+y^2=4$

よって，点 P は円 $(x-2)^2+y^2=4$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は　中心 $(2,\ 0)$，半径 2 の円

練習

2点 A$(-4,\ 0)$，B$(2,\ 0)$ について，次の条件を満たす点の軌跡を求めよ。

(1)　2点 A，B から等距離にある点 P

(2)　2点 A，B からの距離の比が $3:1$ である点 Q

(1)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ より $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって，$(x+4)^2+y^2=(x-2)^2+y^2$

整理すると　$x=-1$

よって，点 P は直線 $x=-1$ 上にある。

逆に，この直線上のすべての点は，条件を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は　直線 $x=-1$

(2)　点 Q の座標を $(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{AQ}:\mathrm{BQ}=3:1$ より $\mathrm{AQ}=3\mathrm{BQ}$　つまり $\mathrm{AQ}^2=9\mathrm{BQ}^2$

よって，$(x+4)^2+y^2=9\{(x-2)^2+y^2\}$

整理すると　$x^2+y^2-\dfrac{11}{2}x+\dfrac{5}{2}=0$

すなわち，$\left(x-\dfrac{11}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{81}{16}$

よって，点 Q は円 $\left(x-\dfrac{11}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{81}{16}$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす。

したがって，求める点 Q の軌跡は　中心 $\left(\dfrac{11}{4},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{9}{4}$ の円

第 7 講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イ：4

[解説]

点Pの座標を $(x,\ y)$ とする。 [A]

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$　より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(x-3)^2+y^2=(x+5)^2+(y-4)^2$

$x^2-6x+9+y^2=x^2+10x+25+y^2-8y+16$

$16x-8y+32=0$

$2x-y+4=0$

よって，点Pは直線 $2x-y+4=0$ 上にある。

逆に，この直線上のすべての点は，条件を満たす。[A]

したがって，求める点Pの軌跡は

直線 $2x-y+4=0$

[A]　点Pの軌跡を求める手順
① 点Pの座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を $x,\ y$ の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。
② ①の図形上のすべての点Pが，与えられた条件を満たすことを確認する。

2

[正解] **ウエ**：16，**オ**：3，**カ**：0，**キク**：10，

ケ：3

[解説]

点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とする。 [B]

AP：BP＝5：2 より　2AP＝5BP

つまり　$4\mathrm{AP}^2=25\mathrm{BP}^2$

よって，$4\{(x+3)^2+y^2\}=25\{(x-4)^2+y^2\}$

$$4(x^2+6x+9+y^2)=25(x^2-8x+16+y^2)$$

$$21x^2+21y^2-224x+364=0$$

$$x^2+y^2-\frac{32}{3}x+\frac{52}{3}=0$$

$$\left(x-\frac{16}{3}\right)^2+y^2=\frac{100}{9}$$

よって，点Ｐは円 $\left(x-\dfrac{16}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{100}{9}$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす。[B]

したがって，求める点Ｐの軌跡は

中心 $\left(\dfrac{16}{3},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{10}{3}$ の円

[B]　点Ｐの軌跡を求める手順

① 点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を $x,\ y$ の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。

② ①の図形上のすべての点Ｐが，与えられた条件を満たすことを確認する。